

Étude des transferts de chaleur non linéaires dans les ailettes longitudinales

Mohamed Najib Bouaziz^{a*}, Said Rechak^b, Salah Hanini^a, Youcef Bal^a, Kheireddine Bal^a

^a Département de génie des procédés, Centre universitaire de Médéa B.P 108, 26000 Médéa, Algérie

^b Département de mécanique, Ecole nationale polytechnique B.P 182, Alger, Algérie

(Reçu le 3 janvier 2000, accepté le 10 novembre 2000)

Abstract — Numerical study of nonlinear heat transfer in longitudinal fins. This work aims to quantify the effects of non-simplified situations on longitudinal fins efficiency. For this purpose a more realistic model, which has been developed here, is based on variable profile and temperature-dependent thermophysical properties in transient two-dimensional fin with internal non-uniform heat generation. An explicit exponential finite-difference method, conditionally stable, is extended in this study for the discretization of the governing equations. The numerical procedure consists in solving series of nodal temperature distribution according to the type of node, in order to reach the steady-state heat exchange. Then, the numerical simulation is used to present the sensitivity of some parameters on efficiency. Numerical results of interest are illustrated for a direct comparison with the traditional solutions. Extensive numerical experiments were conducted and showed that temperature-dependent heat transfer coefficient and generation lead to a significant reduction of fin-efficiency. The simultaneous effects of parameters for this non-linear problem are not negligible.

© 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

fins / efficiency / non-linear / exponential finite-difference / temperature / sensitivity / heat transfer coefficient / profile / non uniform generation

Résumé — Le but du travail décrit dans cet article est de déterminer l'effet des conditions non simplifiées — admises sous forme d'hypothèses non classiques — sur les efficacités des ailettes longitudinales. Pour cet objectif, un modèle plus réaliste est obtenu en considérant l'ailette en transitoire, en 2D, et à propriétés thermophysiques variables avec la température et/ou la position. Le profil est aussi variable et l'ailette est assimilée à une source interne de chaleur. Une méthode des différences finies exponentielles, de nature explicite, conditionnellement stable, et étendue au cas considéré, est utilisée pour la discrétisation des équations. La procédure numérique consiste à calculer une série de distributions nodales des températures suivant le type du nœud, pour accéder au régime permanent. La simulation a permis ensuite d'obtenir l'effet des différents paramètres sur l'efficacité. Les résultats sont illustrés sous forme de courbes variées et sont mis en comparaison directe avec les données classiques. Dans les conditions d'expérimentation numérique, la sensibilité de l'efficacité est extrême pour la source et pour le coefficient d'échange thermique dépendants de la température. L'effet global des non-linéarités n'est pas négligeable. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ailette / efficacité / non-linéaire / différences finies exponentielles / température / sensibilité / coefficient d'échange / profil / source non uniforme

Nomenclature

a	aire de la section normale à l'axe x de l'élément dV	m^2
A	aire d'échange avec le milieu ambiant (deux faces de l'ailette)	m^2
Bi	nombre de Biot = $\alpha w_0/(2\lambda)$	
C	capacité calorifique volumique	$J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$

C_0	terme constant dans la dépendance en température de la conductivité	
C_1	coefficent de dépendance en température de la conductivité	K^{-1}
F	fonction analytique complexe	
g	coefficent de dépendance en température de la source	K^{-1}
G	nombre de génération = $W_0 w_0/(2\alpha T^*)$	
H	expression complexe de discrétisation spatiale	$W \cdot K^{-1}$
k	nombre d'itérations	
K	produit de la conductivité par la surface	$W \cdot m \cdot K^{-1}$
l	dimension de l'ailette suivant l'axe y	m
L	dimension de l'ailette suivant l'axe x	m

* Correspondance et tirés à part.

E-mail addresses: mn_bouaziz@email.com, najibbouaziz@multimania.fr (M.N. Bouaziz), s_hanini@hotmail.com (S. Hanini).

<i>m</i>	pas du réseau carré ($\Delta x = \Delta y$)		<i>m</i>	<i>y</i>	suivant <i>y</i>
<i>m</i>	paramètre de l'ailette rectangulaire $= \sqrt{2\alpha/(\lambda w_0)}$		m^{-1}	0	base
<i>M</i>	nombre de noeuds suivant l'axe <i>y</i>			1	température
<i>N</i>	nombre de noeuds suivant l'axe <i>x</i>			2	efficacité
<i>N*</i>	paramètre de l'ailette rectangulaire $= (m\lambda - \alpha)/(m\lambda + \alpha)$				
<i>q</i>	puissance volumique de la source	$W \cdot m^{-3}$			
<i>S</i>	aire de la section normale à l'axe <i>y</i>	m^2			
<i>t</i>	temps	s			
<i>T</i>	température de l'ailette à partir de l'ambiente	K			
<i>T*</i>	température à la base de l'ailette à partir de l'ambiente	K			
<i>T</i> ₀ [*]	terme constant de <i>T*</i>	K			
<i>u</i>	variable d'intégration				
<i>V</i>	volume de l'ailette	m^3			
<i>w</i>	épaisseur de l'ailette	m			
<i>W</i> ₀	terme constant dans la dépendance en température de la source	$W \cdot m^{-3}$			
<i>x, y, z</i>	coordonnées	m			
<i>Lettres grecques</i>					
α	coefficient d'échange thermique	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$			
β	coefficient de dépendance en température de <i>T*</i>	m^{-1}			
γ	nombre adimensionnel $= \beta l/2$				
δ	opérateur de discréttisation des termes d'espace				
Δ	symbole d'écart				
$\Delta\tau$	pas de temps	s			
ε	critère d'arrêt du calcul				
η	efficacité de l'ailette				
λ	conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$			
μ	expression de discréttisation temporelle	$K \cdot W^{-1}$			
ξ	nombre adimensionnel $= L^{1,5}(\alpha/(\lambda L w_0))^{0,5}$ $= (L/w_0)(2B_i)^{0,5}$				
ξ^*	nombre adimensionnel de correction $= (L + w_0/2)^{1,5}(\alpha/(\lambda L w_0))^{0,5}$				
<i>Indices</i>					
<i>a</i>	ambiant				
<i>c</i>	« Churchill »				
<i>c</i>	constant (pour α)				
<i>i</i>	indicateur de position dans le réseau suivant l'axe <i>x</i>				
<i>j</i>	indicateur de position dans le réseau suivant l'axe <i>y</i>				
M1, M2	variante analytique				
pc	parabolique convexe				
rect	rectangulaire				
tri	triangulaire				
<i>x</i>	suivant <i>x</i>				

m^{-1}	<i>y</i>	base
	1	température
	2	efficacité

Exposants

<i>h</i>	instant de calcul
<i>n</i>	paramètre de sommation
<i>p, r, s</i>	paramètres de sommation
<i>v</i>	coefficent de dépendance en température de α
+	à la position $i + 1/2$ ou $j + 1/2$
-	à la position $i - 1/2$ ou $j - 1/2$
*	spécifique au noeud frontière

1. INTRODUCTION

L'emploi des ailettes comme moyen d'accroissement des échanges thermiques se justifie dans des domaines aussi divers que le nucléaire, l'aéronautique, l'espace ou l'électronique ...

Bergles [1] décrit les techniques d'intensification disponibles et les perspectives d'amélioration. L'ailette, base des surfaces auxiliaires, continue d'être la plus usitée.

En particulier, dans l'industrie frigorifique, où la batterie ailetée occupe une place privilégiée, le développement est tel que les constructeurs réservent des budgets de plus en plus importants à la recherche d'un pouvoir d'échange maximal et d'une compacité élevée [2]. L'évolution bénéfique de cette augmentation des échanges par ailettes mène à des surcoûts d'étude dus à la voie expérimentale. En globalité, quel que soit l'axe d'intérêt choisi, la connaissance précise des conditions physiques et thermiques est primordiale en ingénierie pour l'obtention des résultats probants et précis.

Dans la pratique du dimensionnement des échangeurs, l'efficacité de l'ailette, paramètre essentiel dans l'évaluation des coefficients globaux des transferts, est sommairement adoptée sur la base de modèles analytiques reposant sur un ensemble d'hypothèses idéalisées [3]. Hasseler [4], par exemple, utilise la théorie classique des ailettes (paramètres thermophysiques considérés constants) pour calculer la conduction transversale dans les échangeurs multi-courants.

La déduction de cette efficacité s'effectue à partir des formules de Gardner [5], des expressions simplifiées de Churchill [6]. Ullman et Kalman [7] ont présenté des abaques pour les ailettes annulaires à partir des mêmes hypothèses classiques et dans une perspective d'optimisation de profil.

Bien que les ailettes longitudinales à profil uniforme soient les plus utilisées en raison des avantages de fabrication, celles à profil variable sont aussi d'un grand intérêt pratique, en accord avec la minimisation du poids de matière utilisée.

Shah [8] insiste fortement sur la détermination précise de l'efficacité. L'impact énergétique d'une sous ou sur évaluation de ce paramètre à hauteur de dix pour-cent se traduit par une perte ou par un gain du dixième de la production mondiale de pétrole [9].

Les études avancées sont assez nombreuses. Elles remédiennent aux approches primaires dont les résultats sont souvent infirmés par les mesures expérimentales, conduites par Hu et Jacobi [9] et analysées par Shah [8] qui a signalé que cette simplification de modèles est non valide si l'efficacité est inférieure à 0,8. Ces travaux se caractérisent par un traitement sélectif vis à vis des hypothèses et s'appuient généralement sur des schémas théoriques à solutions le plus souvent analytiques. Look [10], Ju et al. [11], s'intéressent à l'ailette bidimensionnelle avec une variété pour le coefficient d'échange selon le premier auteur. La conductivité thermique dépendante de la température est prise en compte pour les ailettes circulaires par Razelos et Imre [12], et pour les ailettes longitudinales par Aziz [13]. De même, Zubair et al. [14] considèrent cette dernière condition dans une étude d'optimisation. Plusieurs études telles celles de Han et Lefkowitz [15], Unal [16, 17], Laor et Kalman [18], ont été développées en tenant compte d'un coefficient d'échange thermique dépendant de la position ou de la température. Une approche différente est tentée, dans le cas d'un coefficient d'échange variable avec la position, par Sparrow et Chyu [19], Sparrow et Acharya [20], Huang et Chen [21], sous forme de problèmes conjugués de conduction-convection. Le cas d'une ailette dissipant de la chaleur à partir d'une source interne uniforme a été traité par Minkler et Rouleau [22], et par Aziz [23]. Unal [24] a présenté des expressions analytiques pour l'ailette à source non uniforme. D'autres conditions spécifiques du fonctionnement de l'ailette ont été étudiées. Enfin, Cotta et Ramos [25] ont proposé récemment une solution hybride sous quelques hypothèses non simplifiées, et Huang et Shah [26] dans une étude à caractère exploratoire ont conclu pour une ailette rectangulaire, que seul le coefficient d'échange supposé constant mène à de grosses erreurs.

Il est important de noter, qu'outre le fait que ces travaux ne répondent qu'à une classe restreinte de problèmes caractérisés par un ou deux paramètres variables au plus, ces derniers ne le sont qu'avec une sous variable (coordonnées, température). En clair, et après revue cri-

tique des publications, la majorité des auteurs s'accorde sur les disparités par rapport aux efficacités conventionnelles dès qu'une non-linéarité est incluse.

C'est aussi cette absence de travaux quant à la prise en charge de la quasi-totalité des hypothèses et profils, qui est à l'origine de nos recherches, motivées par l'apparition de tels équipements où les conditions de fonctionnement sont complexes et extrêmes. De plus les modèles analytiques cités sont souvent limités à l'ailette rectangulaire et sans échange de chaleur à son extrémité. Dans cette étude, l'accent est mis sur le développement d'un programme à partir d'un modèle général et pouvant présenter toutes les possibilités d'exploration de l'effet des hypothèses non classiques sur les efficacités.

Il convient de préciser que dès lors la validation du modèle effectué, le code de calcul mis au point, basé sur les différences finies exponentielles [27] et adaptés à ce type de problèmes, peut être considéré comme un outil prévisionnel justifié par sa capacité à analyser l'influence des divers paramètres. Entre autres, l'apparition des variations locales des propriétés thermophysiques n'est pas, a priori, sans incidence notable sur les efficacités, et l'estimation globale de leurs effets n'est pas bien cernée. L'objectif de cette étude est l'investigation numérique de l'effet des non-linéarités sur les efficacités.

2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

La *figure 1* représente le schéma d'une ailette convectionne, longitudinale et à section uniforme suivant l'axe y et quelconque suivant l'axe x . L'élément de volume nécessaire aux calculs est aussi montré.

L'écriture de l'équation de l'énergie de l'ailette est formulée sous les hypothèses non classiques suivantes :

- (a) Les transferts sont bidimensionnels et non permanents.
- (b) Les propriétés thermophysiques : la conductivité thermique et la chaleur spécifique évoluent selon la température.
- (c) Le coefficient d'échange n'est pas constant, il est fonction à la fois de la position et de la température.
- (d) L'ailette est une source interne de chaleur de puissance variable avec la température.
- (e) Les transferts de convection à l'extrémité ne sont pas négligés.
- (f) La température à la base de l'ailette varie suivant l'axe y .
- (g) L'épaisseur de l'ailette est variable transversalement et uniforme longitudinalement.

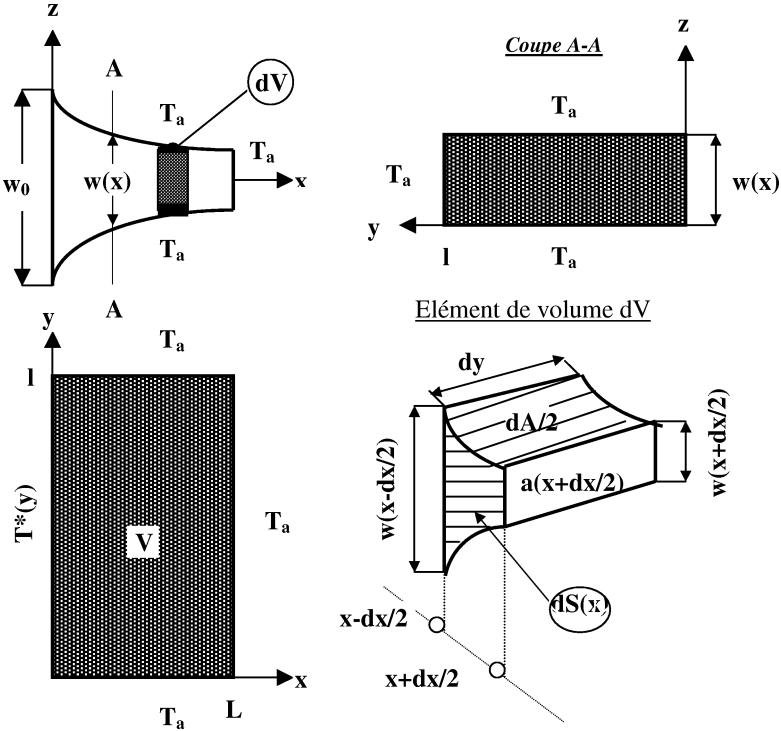


Figure 1. Modèle physique de l'ailette, définitions géométriques.
Figure 1. Schematic diagram of fin, geometrical definitions.

Par contre, les hypothèses simplificatrices habituelles suivantes sont maintenues :

- (h) La longueur dans le sens transversal est assez grande par rapport à l'épaisseur de l'ailette (i.e., mince ou $Bi < 0,1$ avec une erreur inférieure à 1% [28]).
- (i) La température du fluide ambiant est uniforme.
- (j) La résistance de contact entre l'ailette et la paroi mère est nulle.
- (k) L'espace entre deux ailettes consécutives n'est pas très court et l'épaisseur du tube support n'est pas très mince [29].

* Equation de l'énergie :

Par bilan énergétique sur le volume dV et compte tenu des hypothèses admises, l'équation quasi linéaire décrivant les principaux modes de transfert thermique, l'accumulation et la production d'énergie, s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda a(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx + dS(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy + q dV - \alpha dAT = C dV \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

où les notations conventionnelles sont définies dans la nomenclature, avec T la température de l'ailette considérée à partir de l'ambiente T_a , et dA représente la surface totale d'échange de l'ailette (sur les deux faces).

Pour compléter la description du problème, et en accord avec l'hypothèse (f), les conditions initiale et aux limites les plus fréquemment rencontrées sont retenues. Les non-linéarités issues des propriétés thermophysiques sont conservées.

* Condition initiale :

$$T = 0 \quad \text{à } t = 0 \quad (2)$$

* Conditions aux limites :

$$T = T^*(y) \quad \text{en } x = 0 \quad (3a)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T \quad \text{en } x = L \quad (3b)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha T \quad \text{en } y = 0 \quad (3c)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T \quad \text{en } y = l \quad (3d)$$

L'efficacité compare essentiellement la performance thermique d'échange d'une ailette en rapport à celle présentant une conductivité infinie. Par conséquent nous la définissons par la relation suivante :

$$\eta = \frac{\iint_A \alpha T \, dA - \iiint_V q \, dV}{\iint_A \alpha T^* \, dA} \quad (4)$$

3. DISCRÉTISATION ET PROCÉDURE NUMÉRIQUE

3.1. Stratégie du traitement numérique

Les équations à résoudre étant non linéaires, il est impossible de trouver une solution analytique dans un cas aussi général. En vue de la résolution numérique par différences finies de l'équation (1) sous les conditions (2), (3a)–(3d), le domaine de calcul est couvert par un réseau de points pour lesquels les paramètres thermophysiques sont fixés et où les températures sont à calculer. Des modifications de l'écriture de l'équation (1) et spécifiques aux nœuds situés sur les frontières de l'aillette sont reportées au *tableau I*, terme par terme, pour la conduction, production de chaleur, convection et enfin accumulation. Un traitement particulier est ainsi appliqué selon le type de nœud limite. Lorsque le nœud est de position N , la section de transfert équivalente est notée par un astérisque.

Les éléments géométriques sont d'abord remplacés par leurs expressions discrétisées. Ensuite, les équations (1)–(3d) sont à leur tour discrétisées en prenant un schéma totalement explicite par l'intermédiaire des différences finies exponentielles proposées initialement par Battacharya puis par Handschuh [30]. La méthode expérimentée ultérieurement par Handschuh et Keith [31] pour les équations non linéaires en conduction pure à 1D, est étendue dans la présente étude aux termes de convection et de source suivant une conduction 2D en tenant compte des hypothèses (a)–(k). Le principe de la méthode consiste à introduire pour les équations paraboliques une fonction de la température ($\ln T$ étant la plus appropriée), à multiplier les termes d'espace et du temps par la dérivée de la fonction choisie, pour aboutir à une expression discrétisée sous forme exponentielle.

Ce choix est justifié par la facilité de programmation et compte tenu de l'importante place mémoire ainsi que du temps de résolution assez long des systèmes d'équations résultant d'un schéma implicite. On note dans un tel cas, que la procédure de Lees [32] est incontournable

pour les non-linéarités du problème aboutissant aux matrices tridiagonales. Bouaziz et al. [33] ont envisagé cette possibilité pour le présent modèle. Par ailleurs, le problème considéré ne peut être résolu par les méthodes semi-analytiques limitées aux modèles simplifiés [34], quant aux techniques expérimentales, elles sont assez délicates à mettre en œuvre, en raison des difficultés liées à l'interaction des instruments de mesure avec les écoulements adjacents à l'aillette. De ce fait, il ne sera pas toujours possible d'effectuer des comparaisons fines dans ces conditions entre les prévisions numériques et les résultats des expériences.

En considérant un réseau carré, l'équation (1) discrétisée, est donc sous forme explicite :

$$T_{i,j}^{h+1} = T_{i,j}^h \exp[\mu H]_{i,j}^h \quad (5)$$

avec

$$\mu_{i,j}^h = \left[\frac{\Delta \tau}{C \, dV} \right]_{i,j}^h \quad (6a)$$

et

$$H_{i,j}^{h+1} = \left[\left[(\delta_x + \delta_y) \frac{1}{\Delta x} - \alpha \, dA \right]_{i,j}^h T_{i,j}^h + (q \, dV)_{i,j}^h \right] \frac{1}{T_{i,j}^h} \quad (6b)$$

Pour faciliter la programmation de cette équation, on regroupe dans le *tableau II* les expressions de μ et H pour les nœuds intérieurs et aux frontières. Les conductivités et les surfaces d'échange sont calculées suivant le nœud considéré et les nœuds adjacents à partir des températures et sections moyennes respectivement.

L'amélioration de la précision est possible par l'introduction d'un sous-pas de temps. Le nombre d'itérations k conséquent, assure aussi la stabilité de la méthode qui est trouvée similaire aux schémas explicites classiques [31].

Ainsi, l'équation (5) est réécrite comme suit :

$$T_{i,j}^{h+1} = T_{i,j}^h \exp \left\{ \frac{\mu_{i,j}^h}{(k+1)} \sum_{p=0}^k H_{i,j}^{(h+p/k+1)} \right\} \quad (7)$$

La discrétisation est à deux pas en « avant » pour le terme temps, comme montrée dans l'équation (6a) et centrale pour les termes d'espace δ_x et δ_y (*tableau II*).

Dans tous les calculs de l'expérimentation numérique, nous avons retenu des grilles de 16×16 car un maillage plus fin n'apportait pas de changement significatif. Le

TABLEAU I / TABLE I
Equation de l'énergie et ses équivalents pour les nœuds aux frontières.
Equivalent energy equation for nodes on the fin-boundary.

Type de nœud, position	Schéma	Termes de conduction	Terme de production	Terme de convection	Terme d'accumulation
Nœud intérieur $i = 1, \dots, N-1$ $j = 1, \dots, M-1$		$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda a(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx$ $dS(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy$	$q dV$	$-\alpha dA T$	$C dV \frac{\partial T}{\partial t}$
$i = 0$ $j = 0, \dots, M$			Température prescrite $T^*(y)$		
$i = 1, \dots, N-1$ $j = 0$		$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda a(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx$ $\lambda dS(x) \frac{\partial T}{\partial y}$	$q dV/2$	$-\alpha [dS + dA/2] T$	$C dV \frac{\partial T}{2\partial t}$
$i = 1, \dots, N-1$ $j = M$		$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda a(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right] dx$ $-\lambda dS(x) \frac{\partial T}{\partial y}$	$q dV/2$	$-\alpha [dS + dA/2] T$	$C dV \frac{\partial T}{2\partial t}$
$i = N$ $j = 1, \dots, M-1$		$-\lambda a^*(x) \frac{\partial T}{\partial x}$ $dS^*(x) \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] dy$	$q dV^*$	$-\alpha [a^*(x) + dA^*] T$	$C dV^* \frac{\partial T}{\partial t}$
$i = N$ $j = 0$		$-\lambda a^*(x) \frac{\partial T}{\partial x}$ $\lambda dS^*(x) \frac{\partial T}{\partial y}$	$q dV^*/2$	$-\alpha [a^*(x)/2 + dA^*/2 + dS^*] T$	$C dV^* \frac{\partial T}{2\partial t}$
$i = N$ $j = M$		$-\lambda a^*(x) \frac{\partial T}{\partial x}$ $-\lambda dS^*(x) \frac{\partial T}{\partial y}$	$q dV^*/2$	$-\alpha [a^*(x)/2 + dA^*/2 + dS^*] T$	$C dV^* \frac{\partial T}{2\partial t}$

pas de temps a été fixé à 30 s pour l'expérimentation de notre code de calcul et le nombre k a été trouvé suffisant pour la valeur 1001. Aucune anomalie n'a été constatée lors de l'utilisation du code avec le choix de ces valeurs.

Pour les distributions des températures, le critère d'arrêt est fixé à 10^{-8} selon une norme matricielle de type Holder, quant à celui retenu pour l'efficacité, il est de l'ordre de 10^{-4} .

Soit :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} |T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n|^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} |T_{i,j}^{n+1}|^2}} \leq 10^{-8} \quad (8)$$

et

$$\varepsilon_2 = \frac{\eta^{m+1} - \eta^m}{\eta^{m+1}} \leq 10^{-4} \quad (9)$$

n, m étant ici les indices d'itérations.

TABLEAU II / TABLE II
Expressions de μ et H de l'équation de l'énergie (réseau carré).
Expressions of μ and H of energy equation (square grid).

$\mu_{i,j}^h$ [K/W]	$H_{i,j}$ [W/K]
$i = 1, \dots, N-1$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V}$
$j = 1, \dots, M-1$	$\left[[K_x^+ T_{i+1,j} + K_y^+ T_{i,j+1} + K_x^- T_{i-1,j} + K_y^- T_{i,j-1}] - [K_x^+ + K_y^+ + K_x^- + K_y^- + \alpha \Delta x \Delta A] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$
$i = 1, \dots, N-1$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V}$
$j = 0$	$\left[[K_x^+ T_{i+1,j} + 2K_y^+ T_{i,j+1} + K_x^- T_{i-1,j}] - [K_x^+ + 2K_y^+ + K_x^- + \alpha \Delta x [\Delta A + 2\Delta S]] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$
$i = 1, \dots, N-1$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V}$
$j = M$	$\left[[K_x^+ T_{i+1,j} + 2K_y^- T_{i,j-1} + K_x^- T_{i-1,j}] - [K_x^+ + 2K_y^- + K_x^- + \alpha \Delta x [\Delta A + 2\Delta S]] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$
$i = N$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V^*}$
$j = 1, \dots, M-1$	$\left[[K_x^- T_{i-1,j} + K_y^+ T_{i,j+1} + K_y^- T_{i,j-1}] - [K_x^- + K_y^+ + K_y^- + \alpha \Delta x [\Delta A^* + a^*]] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V^* \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$
$i = N \quad j = 0$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V^*}$
$i = N \quad j = M$	$\frac{\Delta\tau}{C\Delta V^*}$
	$\left[[K_x^- T_{i-1,j} + 2K_y^- T_{i,j-1}] - [K_x^- + 2K_y^- + \alpha \Delta x [\Delta A^* + a^* + 2\Delta S^*]] T_{i,j} + q \Delta x \Delta V^* \right]^h / \Delta x T_{i,j}^h$

3.2. Programmation de la méthode

Nous avons écrit un programme traduisant le modèle en Fortran 77. Il est développé pour résoudre les équations discrétisées et il est structuré d'abord par l'introduction des 26 matrices de géométrie et des paramètres thermophysiques qui sont choisis conformément aux hypothèses. Le calcul est poursuivi pour la détermination de la distribution des températures selon l'équation (7) et ses équivalentes pour les noeuds frontières. Les itérations couplées aux conditions d'arrêt de calcul citées permettent la sortie d'une distribution par pas de temps, sur la base de laquelle l'efficacité de l'ailette est calculée selon l'équation (4). Un régime permanent s'établit déterminant une valeur finale de cette efficacité.

La caractéristique principale du code mis au point est l'intégration à tous les niveaux du type de noeud.

3.3. Validation

Pour valider le présent schéma numérique, les solutions obtenues sont comparées à celles existantes dans la littérature pour les modèles classiques. Deux solutions sont choisies comme références et dont les expressions

exactes ou approchées de l'efficacité sont parfaitement connues. Dans les deux cas, l'ailette est rectangulaire à 1D, le régime est permanent, les propriétés thermophysiques sont considérées constantes et il n'y a pas de production de chaleur interne. Les hypothèses (h)–(k) sont valables et l'extrémité de l'ailette est convective (non isolée thermiquement). La température à la base de l'ailette est considérée constante.

* La première solution est représentée par l'expression approchée de Churchill où l'efficacité est de la forme [35] :

$$\eta_c = \left[(1 + (mL)^n)^{n-1} \right]^{-1} \quad (10)$$

avec $n = 2,5$ dans le cas proposé.

* La seconde plus exacte, présente deux variantes, M1 et M2.

** Pour M1, on néglige à l'extrémité de l'ailette les transferts thermiques de conduction–convection dans la section considérée, contrairement à l'hypothèse (e). La distribution des températures est donnée dans [36] :

$$T(x) = T^* \frac{N^* \exp[-mL(2-x/L)] + \exp[-mL(x/L)]}{N^* \exp[-2mL] + 1} \quad (11)$$

et l'efficacité est obtenue par intégration suivant l'équation (4) :

$$\eta_{M1} = \frac{[1 - \exp(-mL)][N^* \exp(-mL) + 1]}{mL[N^* \exp(-2mL) + 1]} \quad (12a)$$

ou bien :

$$\eta_{M2} = \frac{[1 - \exp(-\sqrt{2}\xi)][N^* \exp(-\sqrt{2}\xi) + 1]}{\sqrt{2}\xi[N^* \exp(-2\sqrt{2}\xi) + 1]} \quad (12b)$$

avec le nombre ξ qui exprime le rapport de la résistance interne (de conduction) à celle externe (de convection) pour les dimensions fixées de l'ailette.

** Pour $M2$, l'hypothèse (e) est admise. Nous utilisons alors la procédure de Harper et Brown qui consiste à introduire une longueur fictive $L + w_0/2$, et l'efficacité corrigée s'écrit :

$$\eta_{M2} = \frac{[1 - \exp(-\sqrt{2}\xi^*)][N^* \exp(-\sqrt{2}\xi^*) + 1]}{\sqrt{2}\xi^*[N^* \exp(-2\sqrt{2}\xi^*) + 1]} \quad (13)$$

Pour les ailettes rectangulaires de dimensions fixées L et w_0 , les efficacités η calculées en fonction du paramètre ξ et à partir du présent modèle sont reportées avec celles η_c η_{M1} et η_{M2} dans les *figure 2(a)–(c)* pour les épaisseurs d'ailettes $w_0 = 0,005$ m, 0,01 m et 0,03 m respectivement (les épaisseurs indiquées permettant seulement la correction sur η_{M1}). Afin de montrer les différences, les efficacités η et η_{M2} obtenues sont portées suivant la valeur de ξ correspondante. Nous n'avons pas reproduit les courbes pour d'autres épaisseurs et qui présentent les mêmes allure et tendances. La température de base est fixée à $T^* = 100$ °C, la longueur de l'ailette est $L = 0,05$ m et la largeur $l = 0,05$ m.

Comme le montrent les figures, un bon accord est trouvé entre η et η_{M2} dans tous les cas. Par contre plus l'ailette est épaisse, plus les valeurs η_c et η_{M1} s'écartent du résultat exact. Par conséquent, les approximations pour l'ailette rectangulaire sont à reconstruire dans de telles conditions.

On relève un décalage des efficacités entre les solutions analytiques de références et le présent modèle vers les très faibles valeurs de ξ . Si l'épaisseur de l'ailette augmente, cet écart s'accentue *figure 2 (a) et (c)*. L'examen attentif des deux modèles mis en comparaison, nous permet d'expliquer le phénomène par l'approximation effectuée lors de la détermination de m (et donc de ξ). En effet, on néglige dans la théorie classique la convection par les sections latérales (w_0L). Dans notre formulation, les échanges par ces surfaces sont incorporés (*tableau I et II*).

4. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Partant de la validation du code proposé, une série d'expérimentations numériques a été conduite dans le cas de l'ailette rectangulaire. Nous examinons d'abord les transferts bidimensionnels et le niveau de correction à apporter suivant l'épaisseur de l'ailette. Ensuite, nous analysons la sensibilité de l'efficacité aux paramètres thermophysiques variant avec la température. Nous traitons le cas de la source interne de chaleur, et nous montrons l'effet d'une production uniforme puis d'une source variable avec la température. Enfin, les performances de trois sections sont comparées et nous appliquons le modèle proposé au problème complexe de la conjugaison des non-linéarités et de la température.

4.1. Effet 2D

On n'a pas trouvé des variations dans les distributions des températures suivant l'axe y lors de la simulation avec une température à la base de l'ailette constante. Par conséquent, l'efficacité calculée est identique à celle du modèle 1D.

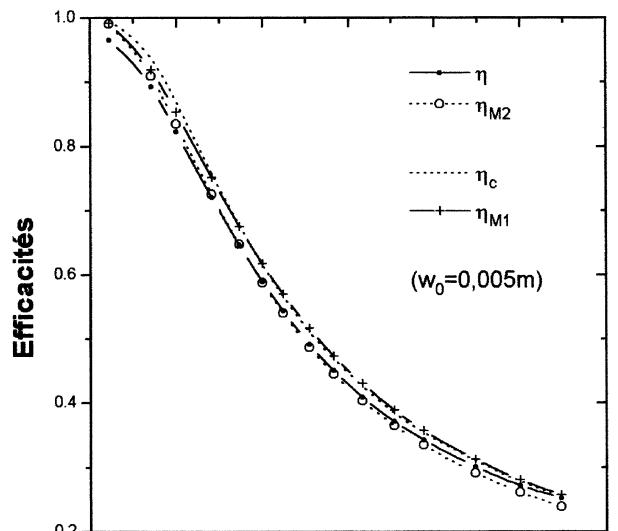
On peut alors se proposer de rechercher l'effet sur l'efficacité d'une variation linéaire de T^* avec y . En posons $T^*(y) = 100[1 + \beta y]$ et pour des valeurs de β dans l'intervalle $[-1, -10]$, les résultats sont presque les mêmes. Dans tous les cas, une différence absolue de l'ordre de 10^{-5} est observée entre l'efficacité η et celle calculée suivant le modèle unidimensionnel.

Ce résultat numérique nécessite une analyse (en annexe) sur un cas équivalent à celui considéré. On montre en effet que l'efficacité ne dépend pas de β . Cependant il y a un rapport de $1 + \gamma$ entre le flux de chaleur à la base, les températures, et les mêmes grandeurs correspondantes calculées à partir de $T_0^* = 100$ °C.

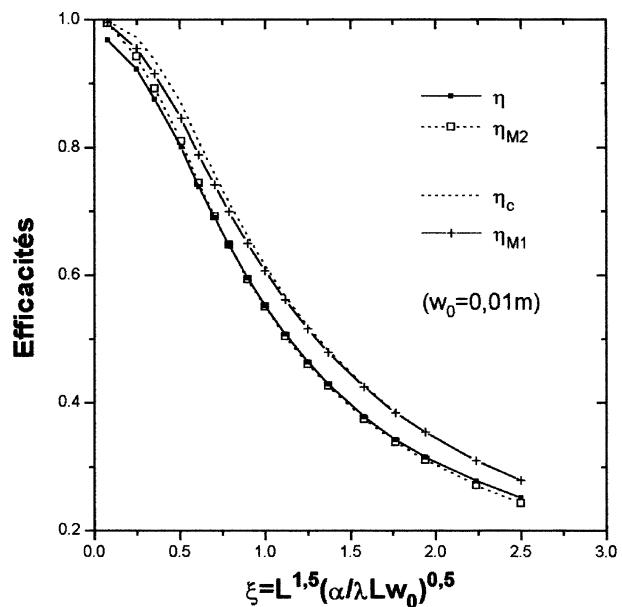
4.2. Épaisseurs des ailettes

Le regroupement des courbes (*figure 2(a)–(c)*) des valeurs de η dans la *figure 3*, montre que les efficacités diminuent sensiblement à mesure que les épaisseurs des ailettes rectangulaires augmentent en rapport à celles calculées sans convection à l'extrémité. Ces données sont aussi complétées pour $w_0 = 0,02$ m.

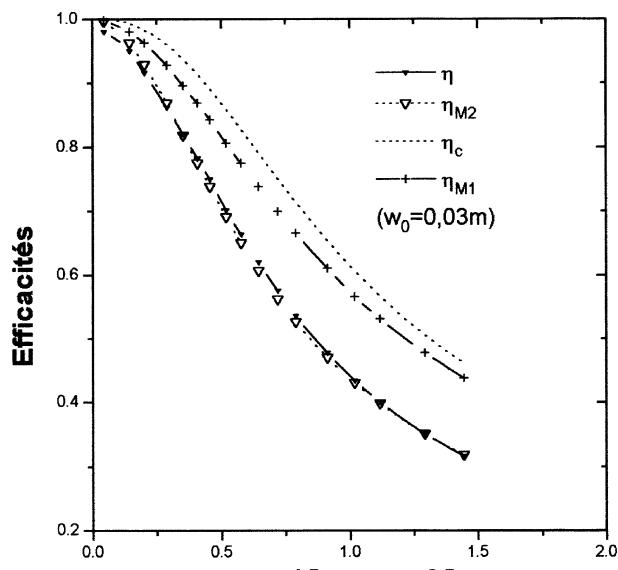
La même figure montre aussi que cette tendance est conservée pour les ailettes à usage pratique ($\eta \geq 0,8$). On peut déduire également, qu'il est avantageux de recourir à des ailettes assez longues et minces en conservant un niveau d'efficacité acceptable.



(a)



(b)



(c)

Figure 2. (a) Efficacités comparées des quatre modèles ($w_0 = 0,005 \text{ m}$); (b) Efficacités comparées des quatre modèles ($w_0 = 0,01 \text{ m}$); (c) Efficacités comparées des quatre modèles ($w_0 = 0,03 \text{ m}$).

Figure 2. (a) Comparison between four models for fin-efficiency ($w_0 = 0,005 \text{ m}$); (b) Comparison between four models for fin-efficiency ($w_0 = 0,01 \text{ m}$); (c) Comparison between four models for fin-efficiency ($w_0 = 0,03 \text{ m}$).

4.3. Conductivité thermique

Elle est considérée souvent constante pour que le modèle mathématique correspondant au problème posé soit résoluble du fait de la linéarité des équations.

Cependant, la plage de variations des températures n'est pas toujours réduite et par conséquent dans certains cas, une dépendance de ce paramètre avec la température n'est pas à ignorer. De plus, pour les échangeurs utilisés en cryogénie de type plaques ailetées, l'évolution de la conductivité est très importante pour une légère variation

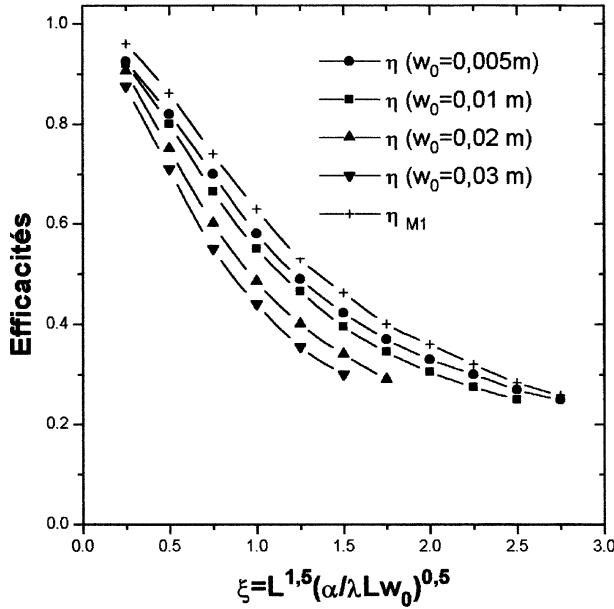


Figure 3. Correction de l'efficacité pour différentes épaisseurs (ailette rectangulaire).

Figure 3. Correction of efficiency for various thicknesses (rectangular fin).

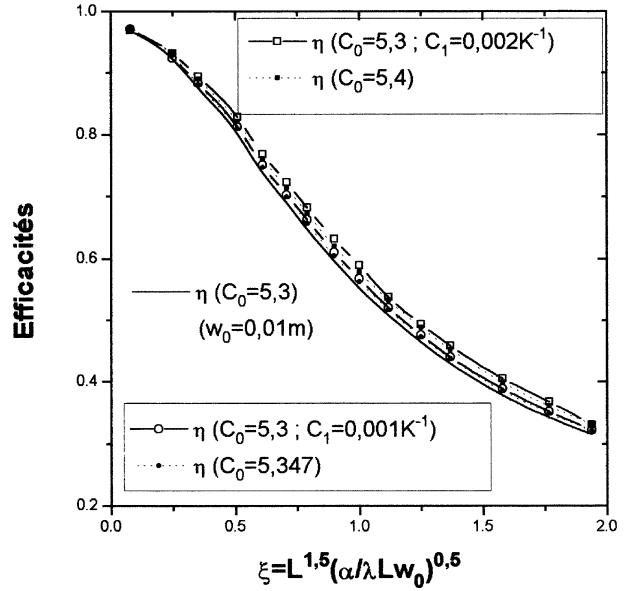


Figure 4. Influence du coefficient C_1 de la conductivité thermique sur l'efficacité.

Figure 4. Influence of the thermal conductivity coefficient C_1 on efficiency.

4.4. Coefficient d'échange

Les études expérimentales ont montré que des variations substantielles du coefficient de transfert ont lieu le long de l'ailette. On attribue ces variations aux non-uniformités des distributions des vitesses et températures des écoulements. L'interaction très forte de la dynamique du fluide et du transfert de chaleur mène aux problèmes couplés. Il existe de nombreuses publications traitant cette dépendance spatiale du coefficient, mais peu se sont intéressées à la dépendance en température. Unal [17] détermine analytiquement les efficacités pour quelques cas limités et spécifiques à l'ailette rectangulaire et adiabatique à son extrémité. Pour le cas général, le problème ne peut être traité que numériquement comme l'admet cet auteur.

L'examen de la formule (4) montre une très grande influence du coefficient du transfert, puisqu'il conditionne à la fois l'efficacité (s'il n'est pas considéré constant) et les distributions de températures. Ces dernières gouvernent à leur tour les efficacités. On montre à la figure 5 les résultats de simulation pour deux cas pratiques pour une liaison de la forme $\alpha(T) = \alpha_c T^\nu$:

– l'écoulement du fluide autour de l'ailette n'est pas forcé ($\nu = 0,25$) ;

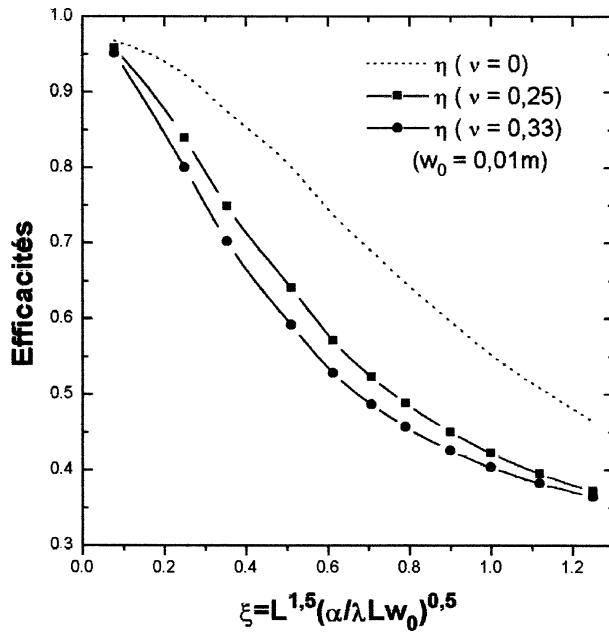


Figure 5. Profils des efficacités suivant un coefficient d'échange variable avec la température.

Figure 5. Efficiencies profiles according to temperature-dependent heat transfer coefficient.

– l'écoulement du fluide autour de l'ailette est forcé ($\nu = 0,33$).

Les efficacités subissent une perte importante par rapport à l'adoption d'un coefficient d'échange constant. On observe aussi, une incurvation des courbes à partir de certaines valeurs de ξ . On constate un écart significatif pour ξ compris entre 0,4 et 1,0, et l'allure des courbes est similaire pour les différentes valeurs de ν . Cette augmentation du coefficient d'échange par la température provoque la réduction de la résistance spécifique surfacique de la convection, et par conséquent une perte d'efficacité.

4.5. Ailette : source interne de chaleur

La figure 6 illustre le cas des ailettes caractérisées par l'existence d'une source interne de chaleur uniforme. Les courbes présentent des allures identiques à celles déterminées par le modèle analytique de comparaison (η_{M2}). Une validation supplémentaire du code est ainsi réalisée. On observe une diminution très rapide des efficacités quand la production de chaleur au sein de l'ailette augmente. η perd approximativement 20% de sa valeur pour $G = 0,2$.

En ce qui concerne l'effet sur l'ailette d'une source de chaleur dépendante de la température, nous n'avons

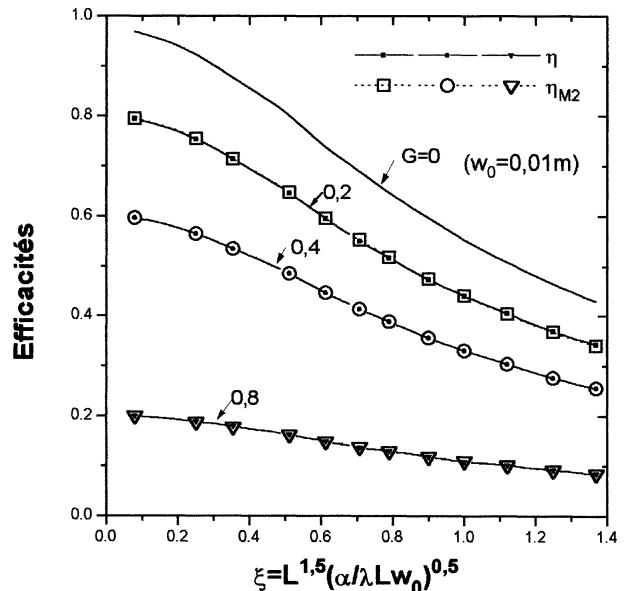


Figure 6. Variations de l'efficacité pour différentes valeurs de G .

Figure 6. Efficiency variations for various G .

pas trouvé de résultats dans la littérature. Dans ce sens, nous avons simulé de telles conditions en admettant une variation linéaire de la source avec la température $q(T) = W_0[1 + gT]$, W_0 étant lié au nombre de génération G et indirectement à ξ . La figure 7 montre qu'il est important dans l'intervalle $\xi \leq 0,5$ de tenir compte d'une telle dépendance. Cependant l'influence de la température sur l'efficacité s'estompe au-delà de $\xi = 0,5$. Il est évident que les ailettes caractérisées par des températures moyennes basses, et donc des efficacités réduites, présentent un effet additionnel modéré.

4.6. Profil d'ailette

On établit la comparaison des profils rectangulaire, triangulaire et parabolique convexe en les considérant de mêmes dimensions (L et w_0) à chaque étape de calcul. Les résultats sont présentés à la figure 8.

La classification des efficacités est conforme à celle des ouvrages classiques, mais des différences sont observées :

- les courbes sont plus rapprochées les unes des autres ;
- le profil parabolique convexe se confond avec le profil triangulaire pour $\xi \leq 0,2$, et au-delà de cette valeur avec le profil rectangulaire ;
- le profil triangulaire est plus performant que les autres.

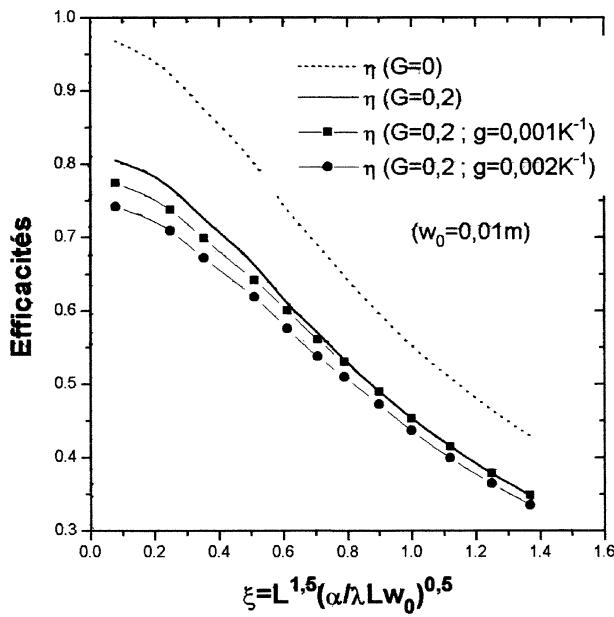


Figure 7. Effet du coefficient g de la source interne sur l'efficacité.

Figure 7. Effect of the heat generation coefficient g on efficiency.

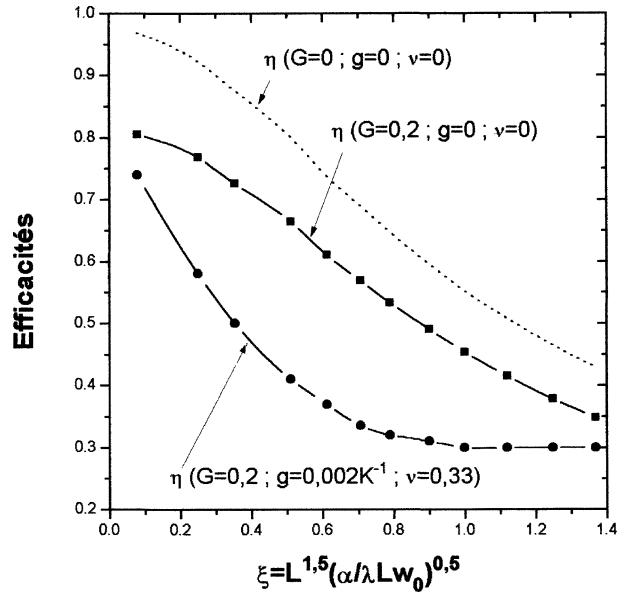


Figure 9. Influence simultanée des paramètres variables avec la température sur les efficacités.

Figure 9. Simultaneous effect of temperature-dependent parameters on efficiencies.

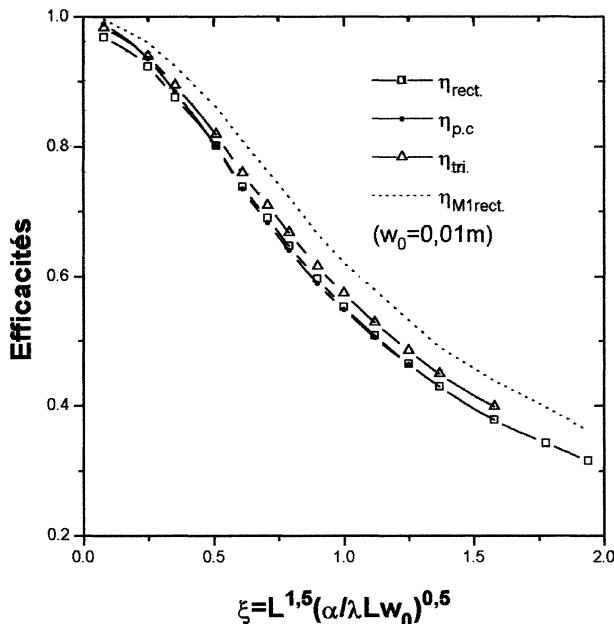


Figure 8. Comparaison entre les profils d'ailettes longitudinales.

Figure 8. Comparison between profiles of longitudinal fins.

La perte en efficacité du profil rectangulaire constatée est vraisemblablement imputable à la prise en compte dans notre modèle de l'hypothèse (e). La supériorité du profil triangulaire est relevée par plusieurs auteurs. Mikk [40] déduit ce résultat dans une approche de minimisation de masse des ailettes.

4.7. Effet global

L'effet d'un ensemble de paramètres non constants est illustré à la figure 9 où la source interne de chaleur dépendante de la température et un coefficient d'échange variable avec la température se conjuguent pour présenter des influences non négligeables sur les efficacités.

5. CONCLUSION

Dans la présente étude, on a établi un modèle non linéaire, bidimensionnel, instationnaire, décrivant les transferts thermiques dans les ailettes de profils divers, à source interne de chaleur et à propriétés thermophysiques variables avec la température et/ou la position. Ce modèle est résolu ensuite numériquement par différences finies exponentielles applicables au cas de non-linéarité. La simulation numérique que nous avons présentée confirme

d'abord les résultats analytiques des cas simplifiés usuels, mais un écart est toutefois relevé lors de la prise en compte du transfert d'extrémité d'une ailette rectangulaire. Une déduction analytique suivant la procédure de Harper et Brown valide plus précisément notre modèle. La condition de la température à la base de l'aillette variable le long du tube, et incluse dans notre modèle, est d'un effet négligeable sur l'efficacité. Puis, nous nous sommes intéressés à l'influence des divers paramètres sur l'efficacité. Pour une ailette rectangulaire, les résultats montrent que l'augmentation de l'épaisseur se traduit par une amélioration de l'efficacité comme cela est prouvé classiquement, cependant une correction est nécessaire. Outre le fait que le présent modèle permet la quantification des effets de la variation des paramètres sur les efficacités, les résultats obtenus soulignent la validité de l'usage des conductivités moyennes et la perte importante de l'efficacité de l'aillette soumise à un échange de coefficient conducto-convectif dépendant de la température de l'interface. De plus, on ne peut ignorer l'influence de la température lorsque l'aillette est à source interne variable. Le modèle présenté constitue une alternative dans l'approche initiale de l'efficacité, paramètre évalué sommairement lors du dimensionnement des équipements ailetés placés dans des conditions extrêmes mais dont la conjugaison des effets réduit fortement la valeur.

RÉFÉRENCES

- [1] Bergles A., Heat transfer enhancement—the encouragement and accommodation of high heat flux, *J. Heat Transfer* 119 (1997) 9-19.
- [2] Rigot G., Echangeurs : l'évolution technologique des échangeurs ailetés, *Rev. Pratique Froid Conditionnement D'Air* 770 (1993) 30-34.
- [3] Smith E.M., *Thermal Design of Heat Exchangers : A Numerical Approach, Direct Sizing & Stepwise Rating*, Wiley, New York, 1999.
- [4] Haseler L.E., Performance calculation methods for multi-stream plate-fin heat exchangers, in: Taborek J., Hewitt G.F., Afgan N. (Eds.), *In Heat Exchangers: Theory and Practice*, Hemisphere/McGraw-Hill, New York, 1983.
- [5] Gardner K.A., Efficiency of extended surface, *Trans. ASME* 67 (1945) 621-631.
- [6] Churchill S.W., Approximations for the efficiency of fins and spines, *Lett. Heat Mass Transfer* 4 (1977) 385-389.
- [7] Ullman A., Kalman H., Efficiency and optimized dimensions of annular fins of different cross-section shapes, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 1105-1110.
- [8] Shah R.K., Advances in compact heat exchanger technology and design theory, in: *Proceedings of the Seventh International Heat Transfer Conference*, Munich, Germany, Vol. 1, 1982, pp. 123-142.
- [9] Hu X., Jacobi A.M., Local heat transfer behavior and its impact on single-row annularly finned tube heat exchanger, *J. Heat Transfer* 115 (1993) 66-74.
- [10] Look D.C. Jr., Two dimensional fin with non-constant root temperature, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 977-980.
- [11] Yu Y.H., Chou Y.S., Hsiao C.C., A new approach to the transient conduction in a 2D rectangular fin, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 1657-1661.
- [12] Razelos P., Imre K., The optimum dimension of circular fins with variable thermal parameters, *J. Heat Transfer* 102 (1980) 420-425.
- [13] Aziz A., Na T.A., Periodic heat transfer in fins with variable thermal parameters, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 24 (1980) 1397-1404.
- [14] Zubair S.M., Al Garni A.Z., Nizami J.S., The optimal dimensions of circular fins with variable profile and temperature-dependent thermal conductivity, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 3431-3440.
- [15] Han L.S., Lefkowitz S.G., Constant cross-section fin efficiencies for non-uniform surface heat transfer coefficients, *ASME paper* (1960) 60-WA-41.
- [16] Unal H.C., Determination of the temperature distribution in an extended surface with a non uniform heat transfer coefficient, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 28 (1985) 2279-2284.
- [17] Unal H.C., An analytic study of boiling heat transfer from a fin, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 341-349.
- [18] Laor K., Kalman H., Performance and optimum dimensions of different cooling fins with a temperature-dependent heat transfer coefficient, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 1993-2004.
- [19] Sparrow E.M., Chyu M.K., Conjugate forced convection-conduction analysis of heat transfer in a plate fin, *J. Heat Transfer* 104 (1982) 204-206.
- [20] Sparrow E.M., Acharya S., A natural convection with solution determined non-monotonically varying heat transfer coefficients, *J. Heat Transfer* 103 (1981) 218-225.
- [21] Huang M.J., Chen C.K., Conjugate mixed convection and conduction heat transfer along a vertical circular pin, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 28 (1985) 523-529.
- [22] Minkler W.S., Rouleau W.T., The effects of internal heat generation on heat transfer in thin fins, *Nuclear Sci. Engrg.* 7 (1960) 400-406.
- [23] Aziz A., Perturbation solution for convective fin with internal heat generation and temperature-dependent thermal conductivity, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 20 (1977) 1253-1255.
- [24] Unal H.C., Temperature distributions in fins with uniform and non uniform heat generation and non uniform heat transfer coefficient, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 30 (1987) 1465-1477.
- [25] Cotta R.M., Ramos R., Integral transforms in the two-dimensional non-linear formulation of longitudinal fins with variable profile, *Internat. J. Numer. Methods Fluid Flow* 8 (1) (1998) 27-42.
- [26] Huang L.J., Shah R.K., Assessment of calculation methods for efficiency of straight fins of rectangular profile, *Adv. Heat Exchanger Design Radiation Combustion ASME HTD* 182 (1991) 19-30.

[27] Battacharya M.C., An explicit conditionally stable finite difference equation for heat conduction problems, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 21 (1985) 239-265.

[28] Lau W., Tan C.W., Errors in one-dimensional heat transfer analysis in straight and annular fins, J. Heat Transfer 95 (1973) 549-551.

[29] Heggs P.J., Stones P.R., The effects of dimensions on the heat flowrate through extended surfaces, J. Heat Transfer 102 (1980) 180-182.

[30] Handschuh R.F., An exponential finite difference technique for solving partial differential equations, NASA National Technical Information Sce, Springfield, VA (1987) Report TM-89874.

[31] Handschuh R.F., Keith T.G. Jr., Application of an exponential finite difference technique, Numer. Heat Transfer A 22 (1992) 363-378.

[32] Lees M., A linear three-level difference scheme for quasi-linear parabolic equations, Math. Comp. 20 (1966) 516-522.

[33] Bouaziz M.N., Hanini S., Rechak S., Bal Y., Bal K.E., Convergence d'un schéma numérique à trois niveaux pour le problème d'évolution à 2D de la conduction dans les ailettes, in: Troisième Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de l'Ingénieur, CIMASI 2000, Casablanca, Maroc, 2000, pp. 1-2.

[34] Martinet J., Thermocinétique Approfondie, Tech. & Doc., Lavoisier, Paris, 1990.

[35] Gosse J., Guide Technique de Thermique, Dunod-Bordas, Paris, 1981.

[36] Rohsenow W.M., Hartnett J.P., Ganic E.N., Handbook of Heat Transfer Fundamentals, 2nd edn., McGraw-Hill, New York, 1985.

[37] Laurent M., Vuillermoz P.L., Conductivité thermique des solides, Techniques de l'Ingénieur, traité constantes physico-chimiques K 420, 1997.

[38] Rosman E.C., Carajilescov P., Saboya F.E.M., Performance of one and two-row tube and plate fin heat exchangers, J. Heat Transfer 106 (1984) 627-632.

[39] Bouaziz M.N., Hanini S., Rechak S., Bal Y., Bal K.E., Solution analytique pour une ailette rectangulaire et longitudinale : la conductivité thermique étant dépendante de la température, in: 4^{èmes} J. Maghrébines d'Etudes de Génie Mécanique, JMEGM' 99, Constantine, Algérie, 1999, pp. 394-398.

[40] Mikk I., Convective fin of minimum mass, Internat. J. Heat Mass Transfer 23 (1980) 707-711.

ANNEXE

Les transferts de chaleur pour le modèle physique considéré sont régis par l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - m^2 T = 0 \quad (A.1)$$

et pour simplifier l'analyse, les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} T^* &= T(y) & \text{en } x = 0 \\ T &= 0 & \text{en } x = L \\ T &= 0 & \text{en } y = 0 \\ T &= 0 & \text{en } y = l \end{aligned} \quad (A.2)$$

La solution de ce problème peut être obtenue par les séries de Fourier [34] :

$$T = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi y}{l} \sinh[(L-x)\sqrt{m^2 + n^2\pi^2/l^2}]}{\sinh[L\sqrt{m^2 + n^2\pi^2/l^2}]} \times \int_0^l T^*(u) \sin \frac{n\pi}{l} u \, du \quad (A.3a)$$

ou bien :

$$T = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} F(x, y, n) \int_0^l T^*(u) \sin \frac{n\pi}{l} u \, du \quad (A.3b)$$

Introduisons la loi de température à la base : $T^*(y) = T_0^*(1 + \beta y)$. Si

$$\gamma = \frac{\beta l}{2}$$

alors

$$\int_0^l T^*(u) \sin \frac{n\pi}{l} u \, du = \begin{cases} \frac{2T_0^*l}{n\pi}[1 + \gamma] & n = r = 1, 3, 5, \dots, \\ \frac{2T_0^*l}{n\pi}[-\gamma] & n = s = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (A.4)$$

L'efficacité suivant l'équation (4) est :

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\int_0^L \int_0^l \alpha \frac{2}{l} \left[\sum_{r=1}^{\infty} F(x, y, r) \frac{2T_0^*l}{r\pi}[1 + \gamma] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{s=2}^{\infty} F(x, y, s) \frac{2T_0^*l}{s\pi}[-\gamma] \right] dx dy \right) \\ &\quad \times (\alpha T_0^* l L [1 + \gamma])^{-1} \end{aligned} \quad (A.5)$$

En portant $F(x, y, s)$ suivant l'équation (A.3a) et en intégrant par rapport à y , le second terme du numérateur de (A.5) s'annule (s étant un nombre pair) ; le premier terme est strictement positif. Par conséquent, l'équation (A.5) se simplifie et η ne dépend pas de β .

Abridged English version
Numerical study of nonlinear heat transfer in longitudinal fins

Using a two-dimensional longitudinal fin with variable profile, heat internal generation, as a physical model (*figure 1*), the authors propose a mathematical formulation of unsteady-state thermal transfer in convective fin. For this non-classical fin, the admitted assumptions are made in order to obtain a more realistic description of the heat transfer:

- thermophysical properties are temperature-dependent and/or position: thermal conductivity, specific heat, heat transfer coefficient;
- the internal heat generation is also temperature-dependent;
- the exchange heat in the tip fin is not ignored.

However, the fin is considered thin so that no variation temperature occurs in the vertical direction. We consider that the spacing fin assembly is sufficient to neglect flow effect.

With the foregoing as background, the governing energy equation is established and pertinent boundary conditions are considered under temperature-dependent parameters. The discretization of these equations is carried out using an explicit numerical method. Several numerical procedures are available throughout the literature, but they are not applied for high nonlinear formulation. The methodology of Lees based on three level time is possible and leads to systems of algebraic equations that have a tridiagonal structure, but it requires enormous computations. Direct method is preferred in this case because its combines accuracy and little computer-time.

A numerical technique based on exponential finite-difference is applied for solving equations, which are specified for each type of node (*table I* and *II*). The method used by Battacharya and Handschuh is extended to the nonlinear problem with variable terms like convection and heat internal generation. The main objective is to determine efficiency of fins that are sensitive to temperature distribution and to heat transfer coefficient.

A computation code in FORTRAN is then developed to solve the distributions of temperature and for fins efficiencies. The stability of the explicit scheme is satisfied by adding an internal iteration parameter in each sequence. The numerical procedure consists in solving a series of transient described thermal transfer problem in order to obtain a steady-state fin efficiency when the difference between two consecutive results are less than prescribed.

Some classical heat transfer numerical experiments are conducted in order to illustrate the validity of the present code. Temperature distributions and fin efficiencies results are in good agreement with those analytically known, for both heat transfer in fin with and without heat internal generation and for performance of various fin profile as well (*figures 2(a)–(c), 3, 6 and 8*). The authors point out that their calculation code may be safely used if a good iteration parameter is chosen.

We found that no variation on efficiency appear when non uniform temperature is prescribed at the fin base.

Then, different effects such as temperature-dependent thermal conductivity, variable heat transfer coefficient and internal heat generation are discussed. Sensitivity of those parameters allows us to observe mainly the effect of temperature on efficiencies. We observe that arithmetic mean is satisfactory when analysing variable thermal conductivity with temperature (*figure 4*). The heat transfer coefficient is sensitive to temperature and its influence on efficiency is too large. In addition, it is worth mentioning that the effect of this parameter is also the more critical as demonstrated by relevant literature for the non-uniformity (*figure 5*). We determine that a significant effect is found for an internal temperature-dependent heat generation on efficiency, particularly for a thin fin (*figure 7*).

These different effects lead to consider a new approach when designing real heat exchangers with plate-fin. Our results for the simultaneous effects showed a profound discrepancy with the classical solution (*figure 9*).